

**Е. А. Митюшов**, проф, д-р ф.-м. наук, **Н. Е. Мисюра**, канд. ф.-м. наук  
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина,  
г. Екатеринбург, Россия  
Тел./Факс: +7 (912) 241-0036; E-mail: mityushov-e@mail.ru, n\_misura@mail.ru

## КВАТЕРНИОННЫЕ МОДЕЛИ В КИНЕМАТИКЕ И ДИНАМИКЕ СФЕРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*В статье рассматриваются различные способы параметризации сферического движения твердого тела. На примере универсального шарнира демонстрируется использование самолетных углов и кватернионов при описании кинематики элементов сложных технических систем. С использованием предложенного формализма получены аналитическое выражение в виде основного уравнения кинематики универсального шарнира, связывающее угловые параметры положения крестовины с углом между осями пересекающихся валов. Путем решения обратной задачи динамики найдены координаты вектора вращающего момента, приложенного к крестовине универсального шарнира.*

**Ключевые слова:** кватернионы, шарнир Кардана-Гука, сферическое движение, динамика твердого тела.

**E. A. Mityushov, N. E. Misyura**

## QUATERNION MODELS IN KINEMATICS AND DYNAMICS OF SPHERICAL MOTION OF ELEMENTS OF COMPLEX TECHNICAL SYSTEMS

*The article deals with various methods of parametrization of spherical motion of a solid body. The example of a universal joint demonstrates the use of airplane angles and quaternions in describing the kinematics of elements of complex technical systems. Using the proposed formalism, an analytical expression is obtained in the form of the basic kinematics equation of the universal joint, which connects the angular parameters of the crosspiece position with the angle between the axes of intersecting shafts. By solving the inverse problem of dynamics, the coordinates of the torque vector applied to the crosspiece of the universal joint are found.*

**Keywords:** quaternions, Cardan-Hooke joint, spherical motion, dynamics of a solid body.

### 1. Введение

Традиционно для систем со сферическими кинематическими парами, допускающими три независимых вращения звеньев относительно друг друга, используется параметризация движения с помощью углов Эйлера. Для представления кинематических уравнений такая параметризация приводит к громоздким тригонометрическим выражениям и вырождению кинематических уравнений при некоторых значениях параметров (gimbal lock). Трудности в исследовании динамики движения таких механических систем связаны с необходимостью интегрирования дифференциальных уравнений движения при наличии неголономных связей и необходимостью выбора параметризации их положения в пространстве, исключающее возникновение особенностей. В данной работе предлагается кватернионная модель, которая позволяет обойтись без использования тригонометрических функций, а кинематические уравнения записать в виде линейных дифференциальных уравнений, исключающих недостатки, связанные с применением углов Эйлера.

При кватернионном описании сферического движения твердого тела для задания его ориентации используются четырехмерные единичные векторы. При этом первая координата определяет угол поворота связанной с телом системы координат вокруг оси конечного поворота, а следующие координаты определяют положение этой оси. Возможность отыскания кватернионных функций при решении конкретных задач управле-

© Митюшов Е.А., Мисюра Н.Е.; 2020

ния движение позволяет получать эффективные алгоритмы управления движения различных механических систем.

Целью работы является обзор методов параметризации сферического движения твердого тела и иллюстрация кватернионного описания этого движения на примере кинематики и динамики универсального шарнира. Универсальный шарнир (шарнир Кардана – Гука) это основной узел карданной передачи – механизма, передающего крутящий момент у валов с пересекающимися осями [2,3]. Карданные передачи находят широкое применение в автомобилестроении, при изготовлении сельскохозяйственных и дорожных машин, в механическом оборудовании металлургических производств.

## 2. Способы параметризации сферического движения

Положение твердого тела определяется параметрами, которые являются функциями времени, а уравнения, которые связывают эти переменные величины со временем, называются уравнениями движения.

Положение тела с одной неподвижной точкой задается тремя параметрами. Положение связанной с телом системы координат относительно поступательно движущейся системы координат можно задать углами Эйлера. Параметрами, определяющими положение твердого тела, в этом случае, являются: угол прецессии, угол нутации, угол собственного вращения. Помимо углов Эйлера для параметризации сферического движения твердого тела используются также самолетные (корабельные) углы, направляющие косинусы, кватернионы и параметры ось-угол.

### Самолетные углы

Для задания ориентации летательных аппаратов используются самолетные углы:  $\vartheta$  - угол тангажа,  $\psi$  - угол курса,  $\gamma$  - угол крена. При этом, ось  $Ox_2$  опорной системы координат с началом в центре масс летательного аппарата направлена по местной вертикали, а ось  $Ox_1$  в горизонтальной плоскости по курсу. Угол тангажа  $\vartheta$  определяет поворот тела вокруг оси  $Ox_3$  опорной системы против хода часовой стрелки от оси  $Ox_1$  к оси  $Ox_2$ . В результате этого поворота получается система координат  $Ox'_1x'_2x'_3$ . Угол рыскания  $\psi$  задает поворот вокруг оси  $Ox'_2$  от оси  $Ox_3$  к оси  $Ox'_1$ . Получаем систему координат  $Ox_1x'_2x'_3$ . Угол крена  $\gamma$  определяет поворот вокруг оси  $Ox_1$  от оси  $Ox'_2$  к оси  $Ox'_3$ . После последовательного выполнения этих поворотов получается связанная с самолетом система координат  $Ox_1x_2x_3$  (рис.1).

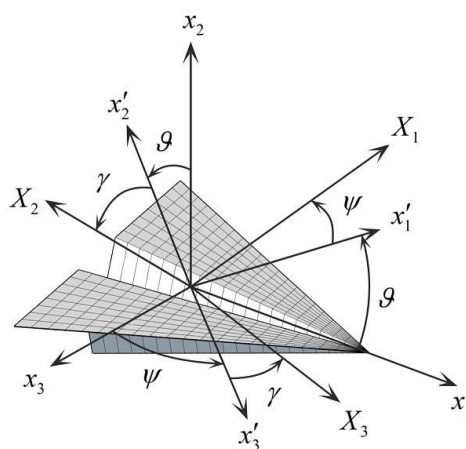


Рисунок 1. Последовательность поворотов  $\vartheta \rightarrow \psi \rightarrow \gamma$ .

*Матрица направляющих косинусов*

Взаимное расположение подвижной и неподвижной систем координат при сферическом движении твердого тела может задано с помощью, так называемой, матрицы направляющих косинусов

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

Элементами этой матрицы являются косинусы углов между осями подвижной и неподвижной систем координат

$$Q_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j = \cos(Ox'_i, Ox_j) \quad i, j = 1, 2, 3.$$

(при матричном описании движения применяется нумерация осей координат)

С учетом шести условий ортогональности

$$\sum_{n=1}^3 Q_{in} Q_{jn} = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

для направляющих косинусов независимых ее элементов только три.

Определитель матрицы направляющих косинусов равен единице. Совокупность всех матриц направляющих косинусов образуют группу по умножению SO (3) (специальная ортогональная группа матриц третьего порядка - группа вращений).

Группа вращений (группа поворотов) это набор всех вращений вокруг начала координат в трехмерном евклидовом пространстве. Вращение вокруг начала координат является линейным ортогональным преобразованием, которое в операторном виде записывается равенством

$$\vec{x}' = R \vec{x}, \tag{1}$$

где  $R$  - оператор поворота.

В матричном виде преобразование (1) записывается равенством

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad R = \|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$

Это преобразование позволяет найти положение точки твердого тела в системе координат, заданной неподвижным базисом  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  после его поворота. Матрица  $R = \|R_{ij}\|$  называется матрицей поворота.

Примером получения матрицы поворота может служить ее запись через углы Эйлера путем последовательного осуществления поворотов на угол прецессии  $\psi$  вокруг оси  $Ox_3$ , далее на угол нутации  $\vartheta$  вокруг оси  $Ox_1$  в ее новом положении, и далее вокруг оси  $Ox_3$  в ее новом положении

$$R = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \cos \vartheta \cos \psi \sin \varphi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \vartheta \cos \psi \cos \varphi & -\sin \vartheta \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

### Кватернионы

Как известно алгебра (от арабского *الْجَبْر*, «аль-джабр» — *восполнение*) — раздел [математики](#), посвящённый изучению операций над элементами множества произвольной природы, обобщающий обычные операции сложения и умножения чисел. В алгебре кватернионов соответствующими элементами (кватернионами) являются четырехмерные векторы  $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ , которые записываются в следующем виде:

$$q = q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3,$$

где  $q_0, q_1, q_2, q_3$  - координаты кватерниона, являющиеся вещественными числами;  $i_1, i_2, i_3$  - новые числа, которые являются аналогами мнимой единицы в теории комплексных чисел.

Для записи кватернионов удобно использовать геометрическую интерпретацию. При этом мнимые числа  $i_1, i_2, i_3$  отождествляются с единичными векторами ортогонального базиса  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$  трехмерного пространства. Кватернион  $q$  в этом случае рассматривается в виде суммы скалярной и векторной части

$$q = q_0 + \vec{q}, \quad \vec{q} = q_1 \vec{i}_1 + q_2 \vec{i}_2 + q_3 \vec{i}_3.$$

По аналогии с комплексными числами вводится сопряженный кватернион

$$\bar{q} = q_0 - q_1 i_1 - q_2 i_2 - q_3 i_3.$$

Кватернион называется единичным, если выполняется равенство

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Группа единичных кватернионов  $Sp(1)$  двулиственным образом покрывает группу вращений  $SO(3)$ , так как элементам  $[q_0, q_1, q_2, q_3]$  и  $[-q_0, -q_1, -q_2, -q_3]$  соответствует один элемент группы  $SO(3)$ . Известно, что матрица направляющих косинусов через координаты кватерниона выражается равенством [1]

$$Q = \|Q_{ij}\| = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_0 q_3 + q_1 q_2) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) \\ 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, сферическое движение твердого тела можно моделировать движением точки по гиперсфере:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

При этом движению точки по дуге большого круга отвечает поворот тела вокруг фиксированной оси. Это отражает содержание теоремы Эйлера- Даламбера о конечном повороте - *любое перемещение твёрдого тела, имеющего одну неподвижную точку, можно осуществить одним конечным поворотом вокруг оси, проходящей через эту точку.*

### 3. Кинематика универсального шарнира

Универсальный шарнир состоит из двух вилок, жестко соединенных с валами, и крестовины (рис. 2).

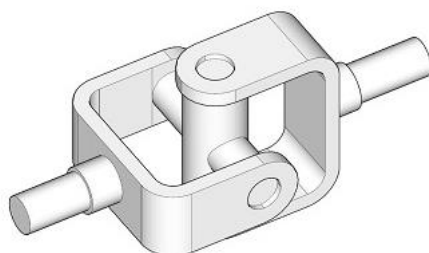


Рисунок 2. Универсальный шарнир (шарнир Кардана – Гука)

Первые теоретические работы, посвященные кинематике универсального шарнира, выполнены Робертом Уиллисом [3] в 1841 году и Жан-Виктором Понселе [4] в 1845 году и были посвящены установлению связи кинематических характеристик ведущего и ведомого вала. Отдельно движение крестовины универсального шарнира практически не рассматривалось, за исключением работы [6], где с использованием тензора поворота было получено разложение вектора угловой скорости крестовины по осям неподвижного базиса. Крестовина универсального шарнира совершает достаточно сложное сферическое движение, но оно легко может быть описано с помощью единичных кватернионов. Преимуществом их использования при описании сферического движения твердого тела является отсутствие вырождения кинематических уравнений при некоторых положениях тела и линейность этих уравнений [1].

Основной результат кинематики универсального шарнира относится к установленной в работе [7] связи между угловой скоростью ведомого вала  $\omega_{II}$  и угловой скоростью ведущего вала  $\omega_I$ , задаваемой соотношением

$$\omega_{II} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi_I} \omega_I, \quad (2)$$

где  $\alpha$  - угол между осями валов,  $\phi_I$  - угол поворота ведущего вала.

Этот результат был найден путем дифференцирования по времени следующего равенства, полученного геометрическим методом:

$$\operatorname{tg} \phi_{II} = \operatorname{tg} \phi_I \cos \alpha, \quad (3)$$

где  $\phi_{II}$  - угол поворота ведомого вала.

Формула (2) получена в предположении, что в начальном положении вилка ведущего расположена перпендикулярна плоскости осей пересекающихся валов. Если

вилка ведущего вала расположена в этой плоскости, то связь между угловыми скоростями задается соотношением [6]

$$\omega_{II} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_I} \omega_I$$

На рисунке 2 представлена кинематическая схема универсального шарнира, красная вилка связана с ведущим валом, а зеленая с ведомым. Для задания ориентации крестовины универсального шарнира воспользуемся самолетными углами:  $\vartheta$  - угол тангажа,  $\psi$  - угол курса,  $\gamma$  - угол крена (рис. 2).

Ось  $Ox_2$  опорной системы координат с началом в центре крестовины направлена вертикально. Ось  $Ox_1$  в горизонтальной плоскости вилки ведущего вала (рис. 2). Угол тангажа  $\vartheta$  определяется поворотом ведущего вала вокруг оси  $Ox_3$  опорной системы против хода часовой стрелки от оси  $Ox_1$  к оси  $Ox_2$ . В результате этого поворота получается система координат  $Ox'_1, x'_2, x'_3$ . Угол курса  $\psi$  в данной задаче равен нулю. Угол крена  $\gamma$  определяет поворот крестовины вокруг оси  $Ox'_1$  от оси  $Ox'_2$  к оси  $Ox'_3$ . После последовательного выполнения этих поворотов получается связанная с крестовиной система координат  $Ox''_1, x''_2, x''_3$ .

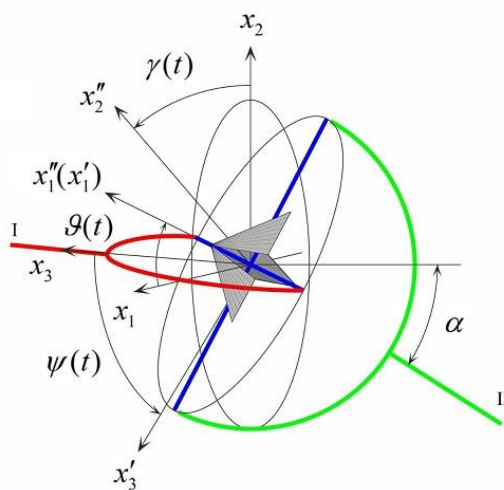


Рисунок 3. Задание ориентации крестовины с помощью самолетных углов и кадры анимации.

Полное исследование кинематики универсального шарнира дается следующими теоремами, которые приводятся без доказательства:

**Теорема 1. (Основное уравнение кинематики универсального шарнира)** Для углов  $\vartheta$ ,  $\gamma$  и  $\alpha$ , определяющих положение крестовины универсального шарнира (рис. 3), в любой момент времени выполняется равенство

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma \cos \vartheta = 1.$$

**Следствие.**

При движении крестовины угол крена  $\gamma$  меняется по закону:

$$\gamma(t) = \frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \vartheta(t)), \quad (4)$$

**Теорема 2.** Для углов  $\varphi_I$ ,  $\varphi_{II}$  и  $\alpha$ , определяющих положения ведущего и ведомого валов универсального шарнира, в любой момент времени выполняется равенство (2)

Полученные в теоремах 1 и 2 кинематические уравнения используем для описания сферического движения крестовины. Воспользуемся кватернионной моделью, согласно которой координаты единичного кватерниона ориентации  $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ ,  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$  связаны с самолетными углами следующими соотношениями [8]:

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ q_1 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ q_2 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ q_3 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Координаты вектора угловой скорости в подвижной системе координат связаны равенством

$$\dot{\Omega}_3 + \Omega_1 \Omega_2 = 0, \quad \dot{\Omega}_2 - \Omega_3 \Omega_1 = 0, \quad (6)$$

**4. Динамика универсального шарнира**

При известной угловой скорости ведущего вала и инерционных характеристиках крестовины проекции главного момента сил, действующих на крестовину, определяются из решения обратной задачи с помощью динамических уравнений Эйлера. При известных главных моментах инерции крестовины  $I_1, I_2$  и  $I_3$ , координаты вектора вращающего момента действующего на крестовину, определяются равенствами:

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1 \dot{\Omega}_1 + \Omega_2 \Omega_3 (I_3 - I_2), \\ M_2 &= I_2 \dot{\Omega}_2 + \Omega_3 \Omega_1 (I_1 - I_3), \\ M_3 &= I_3 \dot{\Omega}_3 + \Omega_1 \Omega_2 (I_2 - I_1). \end{aligned}$$

С учетом выполнения кинематических соотношений (6) доказывается теорема:

**Теорема 4.** Динамические уравнения крестовины имеют вид:

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1 \dot{\Omega}_1 + \Omega_2 \Omega_3 (I_3 - I_2), \\ M_2 &= [I_2 + (I_1 - I_3)] \dot{\Omega}_2, \\ M_3 &= [I_3 - (I_2 - I_1)] \dot{\Omega}_3. \end{aligned}$$

### 5. Заключение

В работе с использованием связи самолетных углов и кватернионной параметризации при описании движения универсального шарнира, включая сферическое движение крестовины, получены:

1. Кинематические характеристики ее движения.
2. Основное уравнение кинематики движения крестовины универсального шарнира в виде аналитического выражения, связывающего угловые параметры положения крестовины с углом между осями пересекающихся валов.
3. Аналитические выражения, позволяющие исследовать динамику универсального шарнира за счет изменения их инерционных характеристик.

Полученные результаты могут быть использованы для создания оптимальных конструкций универсальных шарниров за счет изменения их геометрии.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Борисов А. В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев // НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – Ижевск, 2001. – 384с.
2. Cardanus H. De – Norimberga: Johannes Petreius, 1550.
3. Robert Hooke, A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments (London, England: John Martyn, 1676), 32.p. [электронный ресурс] – URL: <https://books.google.ru/books?id=KQtPAAAACAAJ&pg=PP5&re> – (10.06.2020)
4. Willis, Robert. Principles of Mechanisms, (London, England: John W. Parker, 1841), pp. 272-284. [электронный ресурс] – URL: [https://books.google.ru/books?id=1CCEKSqQaqcC&pg=PA272&redir\\_esc=y#v=onepage&q&f=false](https://books.google.ru/books?id=1CCEKSqQaqcC&pg=PA272&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false) – (11.06.2020)
5. J. V. Poncelet, Traité de mécanique appliquée aux machines, Part 1 (Liège, France: Librairie scientifique et industrielle, 1845), pp. 121-124. [электронный ресурс] – URL: [https://books.google.ru/books?id=QqwAAAAYAAJ&pg=PA121&redir\\_esc=y#v=onepage&q&f=false](https://books.google.ru/books?id=QqwAAAAYAAJ&pg=PA121&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false) – (11.06.2020)
6. Жилин, П. А. Динамика твердого тела / П.А. Жилин – Санкт-Петербург: Изд-во Политехнического ун-та, 2015. – 639 с.
7. Теория механизмов и механика машин: учеб. для вузов / [К. В. Фролов и др.] ; под ред. Г. А. Тимофеева. – Изд. 6-е, исправ. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. – 688 с.
8. Голубев, Ю. Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела. / Ю.Ф. Голубев // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2013. – № 39. – 23 с.

Поступила в редколлегию 14.05.2020 г.